

Электродинамическая интерпретация результатов моделирования динамики электрона методом дискретных элементов

К. М. Зейде

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32

✉ k.m.zeyde@urfu.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается алгоритм обработки динамических и кинематических данных, формируемых при решении задачи движения отдельной частицы методом дискретных элементов. Работа алгоритма нацелена на получение основных электродинамических параметров системы: временная диаграмма напряженностей электрического и магнитного поля в точке наблюдения, их амплитудный и фазовый спектры. Особенности работы алгоритма и предложенного метода моделирования объясняются на тривиальном примере осциллирующего электрона. Приводится подробное описание алгоритма. Одной из рассматриваемых особенностей является автоматизированный учет инертности частицы, который приводит к характерному рывку (изменение ускорения) частицы при динамическом моделировании, даже при ее равномерном движении. Эта ситуация объясняется тем, что в начальный момент времени частица принимается покоящейся. Другой важной особенностью является резкое прерывание напряженности электрического поля в момент прерывания моделирования; схожая ситуация наблюдается при запуске процедуры симулирования. Этим объясняется тот факт, что даже для покоящейся частицы возвращаемый спектр является непрерывным и периодическим. Учет и анализ этих особенностей является важной частью предложенного алгоритма. Электродинамические параметры системы выражаются через классическое представление для потенциалов Лиенара – Вихерта. Комплексный спектр является результатом работы быстрого преобразования Фурье. Используемое ядро решателя методом дискретных элементов – MercuryDPM, обработка данных осуществляется в системе компьютерной алгебры Maxima. Подробно описывается структура выходного файла решателя для его более детальной обработки и последующего глубокого анализа. Предложенный алгоритм может эффективно применяться в рамках концепции мультифизического и полномасштабного моделирования.

Ключевые слова

электрон; метод дискретных элементов; моделирование; динамические характеристики

Для цитирования

Зейде К. М. Электродинамическая интерпретация результатов моделирования динамики электрона методом дискретных элементов. *Ural Radio Engineering Journal*. 2020;4(1):33–50. DOI: 10.15826/urej.2020.4.1.003

Electrodynamic interpretation of the results of electron dynamics modeling using the discrete element method

K. M. Zeyde

Ural Federal University named after first President of Russia B. N. Yeltsin,
32 Mira Str., Ekaterinburg, 620002, Russia

✉ k.m.zeyde@urfu.ru

Abstract

This paper considers the algorithm for processing dynamic and kinematic data, generated by solving the problem of the single particle motion, by the method of discrete elements. The algorithm is aimed at obtaining the basic electrodynamics system parameters, such as the time diagram of the electric and magnetic field strengths at the observation point, its amplitude and phase spectra. The features of the algorithm and the proposed modeling method are explained on the trivial example of the oscillating electron. One of the considered features is the automated accounting of the particle inertia which leads to a peculiar jerk (change in acceleration) of the particle during dynamic modeling, even when it is moving constantly. Another important feature is the sudden interruption of the electric field strength at the moment of interruption of the simulation; the similar situation is occurred when starting the simulation procedure. This explains the fact that even for the particle at rest, the returned spectrum is continuous and periodic. Accounting and highlighting these features is an important part of the purposed algorithm. The electrodynamics parameters of the system are expressed through the classical notation of the Lienard-Wiechert potentials. The complex spectrum is obtained as a result of the fast Fourier transform. MercuryDPM is the solver engine for the discrete element method implementation. Data processing is carried out in the Maxima computer algebra system. The structure of the output file according to the software specification is described in detail. We use the problem of the charged oscillator as a modeling example.

Keywords

electron, discrete element method, modeling, dynamics characteristics

For citation

Zeyde K. M. Electrodynamic interpretation of the results of electron dynamics modeling using the discrete element method. *Ural Radio Engineering Journal*. 2020;4(1):33–50. DOI: 10.15826/urej.2020.4.1.003

1. Введение

В работе [1] описывалась принципиальная возможность применения метода дискретных элементов (см. [2; 3]) для решения частных задач электродинамики в рамках мультифизического подхода к моделированию. В этой же работе проводилась экспериментальная верификация предложенного подхода. Логичным развитием подхода является предельный переход к рассмотрению динамики отдельных элементарных частиц в системе, к так называемому методу дискретных частиц [4]. В электродинамических задачах такой частицей естественным образом является электрон. Область возможных приложений, в которых такое моделирование может оказаться полезным, достаточно обширна. Моделирование динамики электронов особо актуально при разработке новых типов электровакуумных приборов, например релятивистских магнетронов [5] с повышенным значением КПД. Получение кинематических и динамических параметров электронов может найти применение при изучении условий распространения электромагнитных волн в плазме [6] или при моделировании плазменных антенн [7]. В этом контексте крайне важно упомянуть, что восстановление функции движения электрона является важной задачей при изучении мультипакторного эффекта [8].

В данной работе мы используем ядро решателя методом дискретных элементов реализованное в проекте MercuryDPM¹ [1; 2]. Исходные данные для моделирования совпадают с [1]. Тезисно постановка задачи сформулирована в [9]. В данной работе мы ограничиваемся возможностью восстановления электрических полей, являющихся продуктом движения электронов в замкнутой системе (формула (1) в [9]).

Основной нашей мотивацией к проведению данных исследований является создание универсального подхода к моделированию электродинамических эффектов методом дискретных элементов. В ряде задач метод дискретных элементов является предельным случаем метода конечных элементов. В рамках электродинамики класс таких задач должен быть установлен, тем не менее очевидным кажется эффективность гибридного моделирования [10]. При решении задач конечно-элементной сеточной оптимизации по параметру малости целевого эффекта наблюдения [11], требование дискретизации объекта на элементы, сохраняющие все его физические свойства, но минимально возможного объема, естественным образом вытекает из требо-

¹ *Mercury DPM code for discrete particle simulations*. Available at: www.mercurydpm.org

вания к бесконечной малости магнитуды целевого эффекта наблюдения.

Целью настоящего исследования является разработка алгоритма обработки выходных данных решателя с целью получения целевых электродинамических параметров системы.

Следует также указать, что мы видим особый интерес в использовании такого подхода в образовательных целях. Моделирование динамики отдельного электрона, или группы электронов позволило бы наглядно продемонстрировать самые фундаментальные закономерности электродинамики, а также визуализировать их проявления не на уровне полей и волн, а на уровне динамических уравнений отдельных носителей заряда (в том числе виртуальных электронов и фотонов).

2. Основные положения

На рис. 1 представлена геометрия системы и формулируются основные данные для задачи. Границы системы анализа – ограниченная область пространства, в которой ищется кинематические и динамические параметры частицы. Частица не взаимодействует с границей системы и в случае ее пересечения исключается из анализа (повторное пересечение границы невозможно, поэтому информация о частице перестает быть значимой [1]).

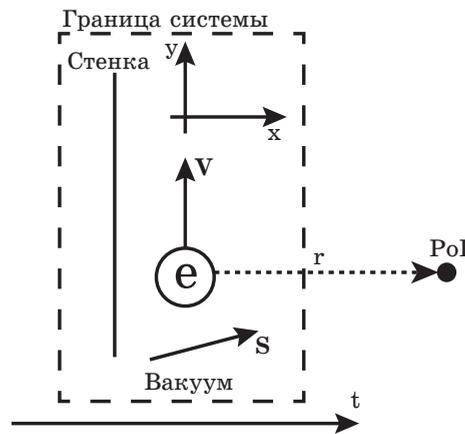


Рис. 1. Геометрия системы и формулировка задачи

Fig. 1. System geometry and problem statement

Для постановки электродинамической задачи важно указать, что вся среда внутри границ является вакуумом. В данном случае это не является допущением или аппроксимацией, так как любая материальная среда должна быть описана также на микроуровне, то есть на уровне частиц – молекул или атомов.

В данной работе мы рассматриваем только двухмерную постановку задачи в прямоугольной системе координат $(x; y)$. Решатель MercuryDPM позволяет проводить и трехмерное моделирование. Обработка результатов в этом случае остается прежней, но запись становится более громоздкой.

В границах системы находится частица – электрон. Фактически количество частиц ограничивается только доступными пользователю вычислительными мощностями. Как и в случае обоснования выбора двухмерного моделирования, мы производим обработку результатов для одного и двух электронов, так как алгоритм для большего количества частиц остается неизменным. Каждая частица имеет вектор скорости \mathbf{V} . Помимо этого в системе может действовать некоторое внешнее силовое поле любой природы \mathbf{S} , определяющее смещение частицы от кинематической траектории движения (это может быть внешнее гравитационное, электрическое, магнитное поле и т.д.) [1].

В границах системы может быть задана стенка, с которой частица вступает во взаимодействие. Характер этого взаимодействия может быть любым (например, упругое столкновение). При столкновении электрона со стенкой может происходить потеря его кинетической энергии.

Для последующей обработки результатов должны быть назначены координаты точки наблюдения за системой (PoI). В общей случае точка интереса может быть назначена где угодно, однако логично выбирать ее за границами анализа системы, чтобы избежать возможных ошибок, связанных с тем, что координаты частицы совпадают с координатами PoI.

Моделирование является динамическим. В системе определяется ось времени t . Отчеты о состоянии системы возвращаются за выбранный дискрет времени Δt . Область анализа системы является лабораторной инерциальной системой отсчета, в которую также входит наблюдатель в PoI.

Как уже говорилось выше, в данной работе мы обрабатываем результат решателя MercuryDPM для получения величины напряженности и частоты электрического поля PoI [9]. Целевая величина выражается известной формулой [13; 14]:

$$\mathbf{E}_{\text{PoI}}(t) = kq_e \underbrace{\left[\frac{(\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\chi^3 r^2} + \frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{r}_0}{\chi^3 r} \times \left\{ (\mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right\} \right) \right]}_{t_p}. \quad (1)$$

Выражение (1) получено через запаздывающие потенциалы Лиенара–Вихерта, а это, в свою очередь, означает, что значение скоростной части и ускорительной части выражения (1) долж-

но вычисляться не в текущий момент времени t , а в прошедший момент времени t_p :

$$t_p = t - \left(\frac{r(t_p)}{c} \right). \quad (2)$$

Магнитное поле в точке наблюдения может быть найдено следующим образом:

$$\mathbf{B}_{\text{PoI}}(t) = \mathbf{E}_{\text{PoI}} \times \mathbf{r}_0. \quad (3)$$

В выражениях (1), (2) и (3) используются следующие обозначения: k – коэффициент пропорциональности в СИ равный:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

q_e – заряд электрона,

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} -$$

единичный вектор, направленный от текущего положения электрона к PoI,

$$\beta = \frac{V}{c} -$$

относительная скорость частицы, $\chi = 1 + \beta$ – магнитуа скоростного эффекта и

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mathbf{a}}{c},$$

где \mathbf{a} – ускорение частицы.

3. Схема моделирования

На рис. 2 показана используемая нами структурная схема моделирования. Первичными входными данными для решателя являются следующие величины: N – количество частиц в системе, x_{max} и y_{max} – координаты границы системы, начальное значение вектора скорости \vec{V} для каждой частицы, значение внешней, действующей в системе силы (или суммы сил) \mathbf{S} , время анализа T (соответствует времени наблюдения за системой) и значение дискрета времени Δt .

Перечисленный набор входных данных является минимальным для проведения расчета (поэтому мы называем его первичным набором). Так как программа MercuryDPM распространяется с открытым исходным кодом, количество входных уточняющих систему данных может быть дополнено произвольным образом. При первичном наборе данных решатель будет анализировать систему с точки зрения ее механического поведения (кинематического и динамического) методом дискретных элементов, что на данном этапе является достаточным.

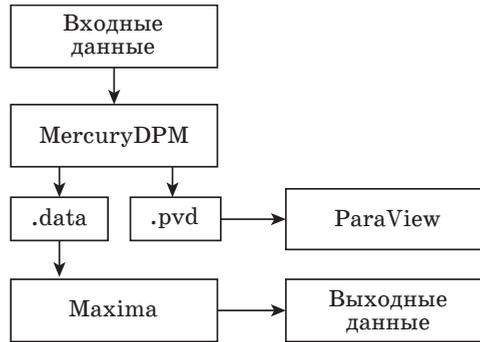


Рис. 2. Структурная схема этапов моделирования
Fig. 2. Structural scheme of modeling

По итогу анализа системы решатель формирует типовые файлы с результирующими данными, в том или ином виде. В данной работе мы описываем алгоритм обработки данных, хранящихся в файле `.data`. Генерируемый программой файл `.pvd` служит для визуализации данных, например в среде ParaView.

На рис. 3 показана структура файла `.data`. Следует указать, что этот файл является основным для последующей обработки, так как содержит полную информацию о кинематических и динамических параметрах каждой частицы в системе в каждый момент времени.

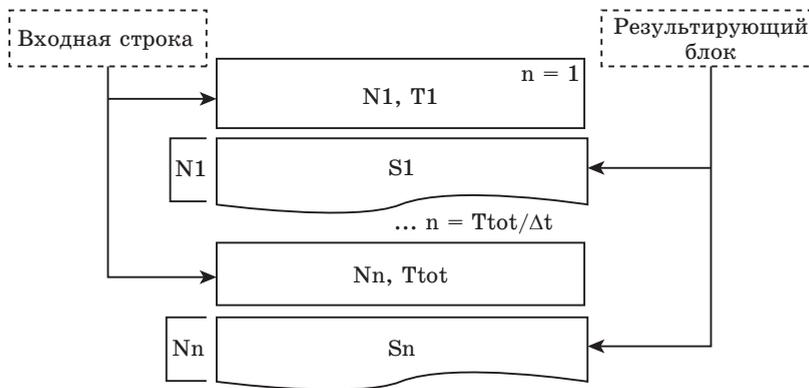


Рис. 3. Структура данных передаваемых на обработку
Fig. 3. Processing data structure

Информация о состоянии системы содержится в так называемом результирующем блоке S . Количество строк этого блока соответствует количеству частиц в системе N , то есть каждая строка описывает текущее состояние каждой частицы. В строке результирующего блока содержится информация по теку-

щему положению частицы в системе, все составляющие вектора мгновенной линейной скорости частицы, все составляющие вектора мгновенной угловой скорости частицы. Перед каждым результирующим блоком располагается входная строка, в которой содержится информация о количестве частиц в системе, текущее время в системе и размеры анализируемой системы. В случае, если на протяжении всего моделирования количество частиц и размеры анализируемого пространства неизменны, то единственной величиной, которая изменяется во входных строках, – это значение текущего времени t . Количество входных строк в файле соответствует количеству временных отчетов, то есть $n = T_{tot}/\Delta t$, где $T_{tot} = T$ – время наблюдения за системой.

Структура выходного файла решателя формирует массив данных, количество строк которого равно $N_s = n(N + 1)$.

4. Обработка данных решателя

Для обработки результатов мы используем систему компьютерной алгебры *Mathima* по основной причине: при использовании этого ядра можно обойтись без графического интерфейса и передавать данные напрямую обработчику в текстовом виде, что существенно экономит вычислительные ресурсы (по сравнению с использованием таких систем как *MathCAD* или *MathLab*). Однако при значительном количестве частиц в системе или/и временных итераций использование такого подхода уже не является оптимальным. В этой связи наиболее разумным кажется организация параллельных вычислений с использованием графических процессоров, например средствами *CUDA* ([14; 15] в качестве примеров использования в вычислительной электродинамике).

После загрузки в вычислительное ядро массива данных осуществляется его структуризация по строкам, согласно рис. 3. По количеству входных строк определяется значение временных итераций n , общее время наблюдения T_{tot} и временной интервал между отчетами Δt . Далее определяется частота дискретизации:

$$f_d = \frac{1}{\Delta t}.$$

Затем формируются массивы данных для значений x , y , V_x , V_y для каждой частицы в каждый момент времени. Из двух последних формируется массивы относительных скоростей частиц. В рамках данной работы для нахождения оптимального значения Δt может быть применен алгоритм, описанный в [16].

Единственной необходимой входной информацией от пользователя для обработчика является значение координат $\text{PoI} = (x_{\text{PoI}}; y_{\text{PoI}})$. Используя эту информацию, формируются массивы модуля вектора r и компонент единичного вектора r_{0x} и r_{0y} .

Также имеет смысл создать массивы данных для модуля мгновенной и мгновенной относительной скоростей частиц. Отсюда естественным образом вытекает массив магнитуд эффекта для каждого временного отчета.

Для того чтобы получить массивы для составляющих ускорения частицы, мы используем кинематическое определение величины:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} -$$

приращение времени в этой записи соответствует дискрету времени моделирования. В соответствии с этим необходимо из массивов составляющих скоростей получить массивы приращений составляющих скоростей: $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_n$. Длина массивов приращений скоростей и ускорения на один меньше, чем длина массивов, рассматриваемых ранее. Это важное замечание может служить источником трудноуловимых ошибок в обработке результатов. Такие укороченные массивы будем отмечать с индексом «-1».

Далее обработчик переходит к расчету составляющих вектора напряженности электрического поля в точке интереса по формуле (1). Важным фактором в этом контексте является проверка на учет времени запаздывания (2). В силу того что минимальное приращение времени в системе определяется только значением Δt , то запаздывание, при котором

$$\left(\frac{r(t_p)}{c} \right) < \Delta t$$

учтено быть не может. Допустимым является ситуация, при которой

$$\left(\frac{r(t_p)}{c} \right) \ll \Delta t \Rightarrow t_p \rightarrow t -$$

в этом случае пренебрежение запаздыванием в (1) не приводит к значительным погрешностям.

После того как обработчик получает массивы амплитуд напряженности электрического и магнитного полей, необходимо получить комплексный спектр излучения. Для решения этой задачи мы используем быстрое преобразование Фурье (БПФ), согласно алгоритмам для Махима [17]. Так как длина обрабатываемого БПФ массива L должна быть равна 2 в целой степени, прежде всего необходимо получить подходящую длину массива (длинна полученного от обработчика массива является произвольной). Имеем:

$$L = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}. \quad (4)$$

Далее формируется нулевой массив [Z0] длиной $(n \cdot L)$. Затем амплитудный массив объединяется с нулевым массивом и вы-

полняется быстрое преобразование Фурье. Результатом работы БПФ является массив комплексных чисел, из которого может быть получен как амплитудный, так и фазовый спектр. Для отображения спектра вычисляется дискрет по частоте:

$$\Delta f = \frac{f_d}{L}. \quad (5)$$

Массив частот для построения спектра имеет длину $(L-1)$ и строится итеративным образом из условия: $f_k = \Delta f \cdot k$, при $k = 0, 1 \dots (L-1)$.

В качестве обобщенной схемы работы алгоритма, на рис. 4 показана структурная схема обработки данных моделирования динамики электрона.

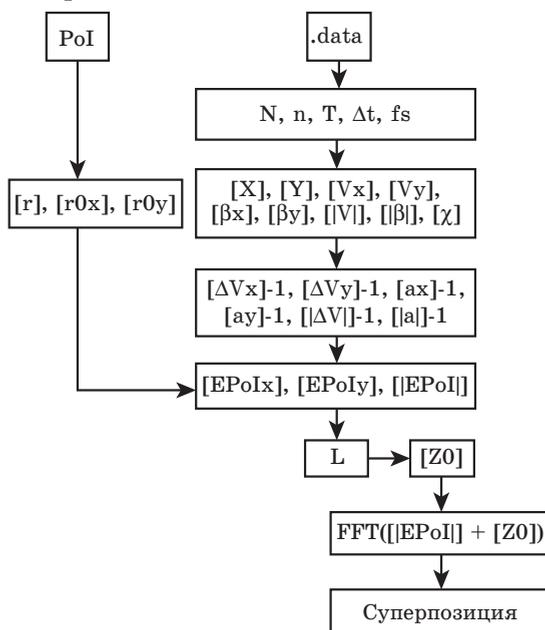


Рис. 4. Алгоритм работы обработчика данных моделирования

Fig. 4. Modeling data processing algorithm

5. Результаты моделирования

В данной работе мы ограничиваемся только рассмотрением некоторых качественных результатов моделирования для объяснения ряда особенностей, связанных с постановкой вычислительного эксперимента методом дискретных частиц.

Рассмотрим систему, в которой один электрон в начальный момент времени начинает движение вдоль оси x . В системе не действует никаких внешних сил, диссипации энергии не происходит. В определенный момент времени частица доходит до ба-

рьера, соударяясь с которым продолжает движение в противоположном направлении. Геометрия модели показана на рис. 5: синей окружностью показано текущее положение электрона – в масштабе метки сливаются в прямую. Красным треугольником обозначена PoI. Черные линии показывают границы системы.

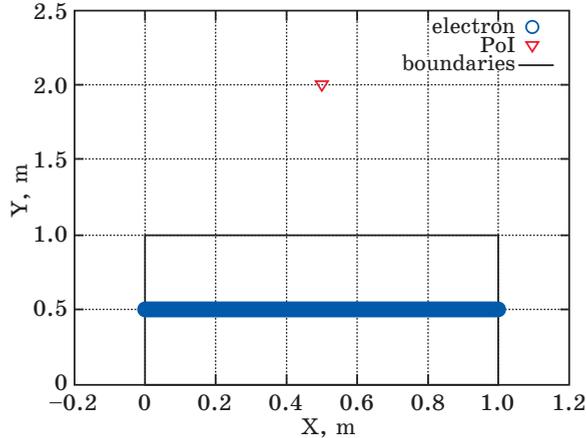


Рис. 5. Геометрия модели

Fig. 5. Geometry model

Входные данные для решателя следующие: $N = 1$, $x_{\max} = 1$ м, $y_{\max} = 1$ м, $V_x = 2.436$ м/с, $S = 0$, $T = 2$ с, $\Delta t = 0,001$ с. Частота дискретизации $f_d = 1$ кГц и $n = 2000$. Выбранная точка наблюдения имеет координаты (0,5; 2). Длина массива для построения спектра $L = 2048$, дискрет по частоте $\Delta f = 0.4883$ Гц.

На рис. 6 показана временная диаграмма напряженности электрического поля в PoI. Рисунки 7 и 8, на которых показан амплитудный спектр, требуют некоторых пояснений.

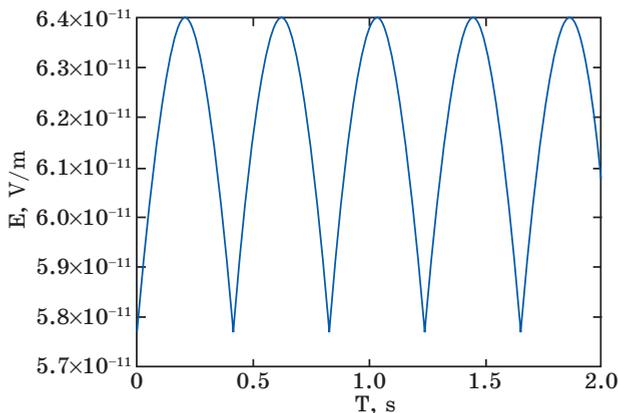


Рис. 6. Временная диаграмма

Fig. 6. Time diagram

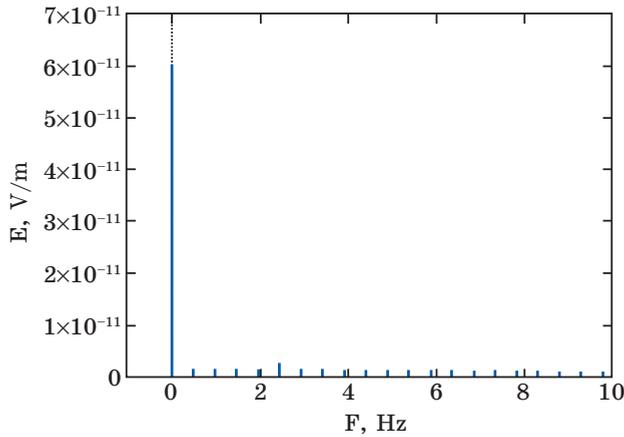


Рис. 7. Амплитудный спектр с нулевой гармоникой

Fig. 7. Amplitude spectrum with zero harmonic

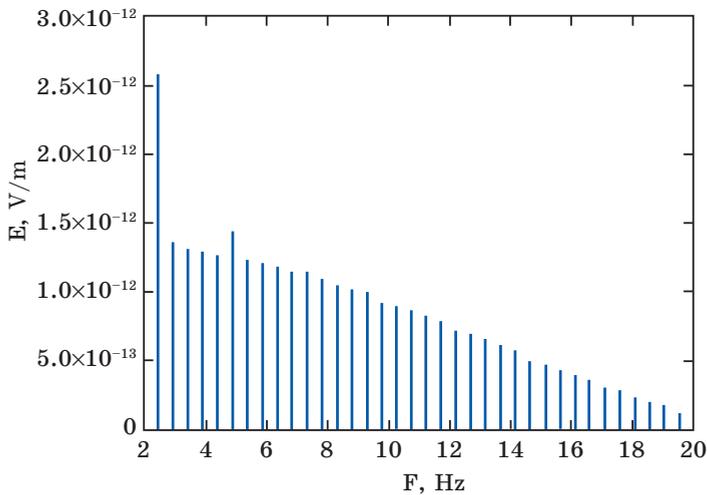


Рис. 8. Амплитудный спектр с первой и второй основными гармониками

Fig. 8. Amplitude spectrum with the first and second harmonics

Первая основная гармоника в спектре располагается на частоте около 2.4415 Гц (рис. 8). Вторая основная гармоника, как можно видеть, расположена на частоте в два раза выше, то есть 4.883 Гц. Эти значения являются ожидаемыми и соответствуют периоду колебаний (рис. 6). Вопросы, требующие пояснения, связаны с максимальным значением напряженности на нулевой частоте и с возникающим непрерывным спектром. Ответ на эти вопросы демонстрируют некоторые особенности при проведении моделирования таким методом.

При начале моделирования любая частица, даже обладающая начальной скоростью в момент времени $t = 0$, считается покоящейся. В момент времени $t_{n=1}$ частица получает ускорение согласно входным значениям. Объяснение этому факту заключается в том, что в методе дискретных частиц учитывается инертность объекта, значит, частица не может получить скорость мгновенно, то есть без снятия отчета о ее состоянии покоя и ускорения. При окончании моделирования частица считается вышедшей из системы, то есть перестает в ней существовать, а значит, перестает существовать и напряженность электрического поля, создаваемого ею. В силу этих факторов провести моделирование постоянного электрического поля, действующего в системе, не представляется возможным, так как в этом случае $t \rightarrow \infty$. При ограниченном времени моделирования, даже покоящегося электрона, временная диаграмма всегда представляет собой прямоугольный импульс неизменной амплитуды длительностью t . Данные положения в полной мере объясняют непрерывный периодический спектр и максимальное значение напряженности на нулевой частоте.

На рис. 9 показана временная зависимость составляющей ускорения электрона от времени анализа. В силу инертности частицы ненулевая составляющая ускорения появляется в некотором количестве начальных отчетов ($n = 1, 2, 3$), а также в момент соударения частицы с барьером. В момент соударения скорость частицы резко падает – ускорение отрицательное, в силу того, что диссипация кинетической энергии не происходит, электрон продолжает движение в противоположном направлении с начальной скоростью, но вновь развивает ее не мгновенно, а за время, равное $n = 3$ отчетов, двигаясь с положительным ускорением.

В силу того, что на определенных моментах времени электрон движется с ускорением, он излучает электромагнитные волны – это ускорительная часть в выражении (1). На рис. 10 показан спектр такого излучения. Легко видеть, что первая и вторая основные гармоники этого излучения располагаются на частотах 2.4415 Гц и 4.883 Гц, то есть излучение когерентно тому, которое образуется из-за равномерного движения электрона (скоростная часть выражения (1)). Это легко объясняется импульсным характером излучения, причем, согласно рис. 9, периоды импульсов соответствуют периодам на рис. 6. В силу того, что амплитуда излучения при ускоренном движении электрона в рассматриваемом случае ничтожна, по сравнению с амплитудой излучения равномерного движения (-26 порядок против -12 порядка), их сумма не дает значимого эффекта.

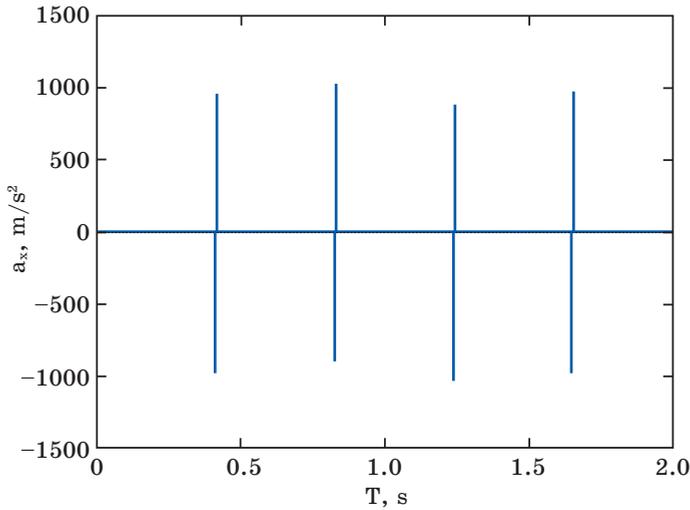


Рис. 9. Зависимость составляющей ускорения от времени
Fig. 9. Acceleration component time dependence

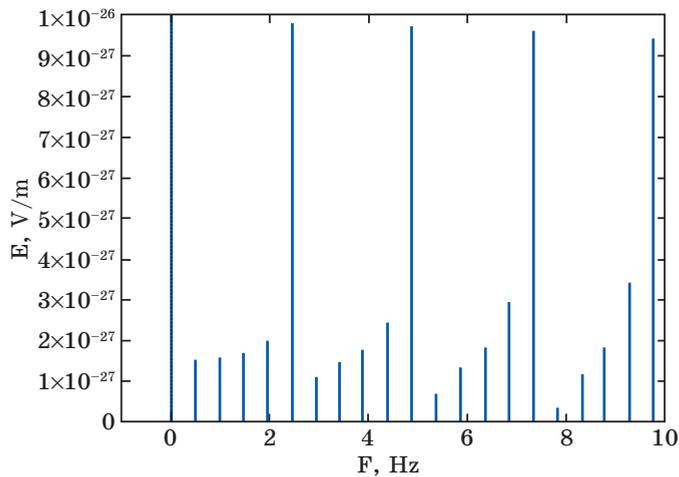


Рис. 10. Амплитудный спектр только ускорительной части
выражения (1)
Fig. 10. Amplitude spectrum for acceleration part of (1)

6. Выводы

В работе описывается основная часть алгоритма обработки данных, поступаемых от решателя методом дискретных элементов, в рамках классической электродинамики. Работа алгоритма продемонстрирована на примере тривиальной задачи для объяснения ряда важных особенностей затронутого подхода моделирования.

Гибкость метода и возможность его адаптации к требуемым параметрам системы, открывает широкие возможности в наиболее точном моделировании динамики электрона с учетом специфических эффектов (например, описанных в [18]), в том числе тепловое движение частиц [19].

Применение предложенного алгоритма в образовательных целях является одной из приоритетных задач в развитии проекта.

Список литературы

1. Зейде К. М. Применение метода дискретных элементов для изучения рефракционных свойств потока жидкости с мелкодисперсными примесями. *Журнал радиоэлектроники*. 2018;(9). DOI: 10.30898/1684-1719.2018.9.4
2. Baorong C., Zhichao H., Zhaochang Z. Improved discrete element method for linear and nonlinear dynamic analysis of 3-D beam structures. *Tsinghua Science and Technology*. 1997;2(2):529–535. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6078045>
3. Nakashima H. Discrete element method (DEM) and its possible application. In: *SICE Annual Conference, Sapporo, Japan, Aug. 4–6, 2004*. P. 1104–1107.
4. Thornton A., Weinhart T., Luding S., Bokhove O., Modeling of particle size segregation: calibration using the discrete particle method. *International Journal of Modern Physics C*. 2012;23(8):1240014. DOI:10.1142/S0129183112400141.
5. Винтизенко И. И., Митюшкина В. Ю. Предельные режимы работы релятивистских магнетронных СВЧ-генераторов. *Радиотехника*. 2005;(10):74–78.
6. Битюков В. К., Королев А. Н., Котов А. Ф. Особенности прохождения радиоволн через нестационарную холодную плазму. *Радиотехника*. 2007;(9):11–13.
7. Колычев С. А., Ярыгин А. П. Излучение плазменной антенны космического базирования, возбуждаемой магнитным диполем. *Радиотехника*. 2008;(6):102–105.
8. Егоров А. В., Мартыненко М. А., Прокофьев Б. В. Мультипакторный разряд в прямоугольных волноводах вывода энергии мощных ЭВП СВЧ. *Журнал радиоэлектроники*. 2015;(6). Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/mac/jun15/3/text.html>
9. Zeyde K. M. MercuryDPM adaptation for electromagnetic microscopic DEM simulation. In: *Proceedings of the 2019 9th IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications, APWC 2019, Granada, Spain, Sept. 9–13, 2019*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2019. DOI: 10.1109/APWC.2019.8870502
10. Munjiza A. *The combined finite-discrete element method*. England: John Wiley & Sons; 2004. DOI: 10.1002/0470020180
11. Zeyde K. M. Optimization of finite element mesh by the a priori parameter of smallness. In: *IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization*

(NEMO), Reykjavik, Iceland, Aug. 8–10, 2018. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2018. DOI: 10.1109/NEMO.2018.8503468

12. Джексон Дж. *Классическая электродинамика*. М.: Мир; 1965.

13. Кобзев А. П. О механизме излучения равномерно движущегося заряда. *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 2014;45(3):1112–1159. Режим доступа: http://www1.jinr.ru/Pepan/2014-v45/v-45-3/06_kobz.pdf

14. Demir V., Elsherbeni A. Z. Compute unified device architecture (CUDA) based finite-difference time-domain (FDTD) implementation. *ACES Journal*. 2010;25(4):303–314. Available at: https://inside.mines.edu/~aelsherb/pdfs/journal_papers/2010/CUDA_Based_FDTD_Implementation.pdf

15. Lvovich I. Ya., Preobrazhenskiy A. P., Choporov O. N., Kaydakova K. V. The analysis of the scattering electromagnetic waves with use of parallel computing. In: *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Omsk, May 21–23, 2015*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2015. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147133

16. Зейде К. М. Оценка оптимальной пространственно-временной дискретизации в задачах слежения за вращающимися целями с использованием MDR. *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2016;21(5):46–51.

17. Woollett E. L. *Maxima by example: Ch.11 Fast Fourier transform tools*. August 13, 2009. Available at: https://www.moodle2.tfe.umu.se/pluginfile.php/27372/mod_book/chapter/416/maxima/maxima_intro/wollett_maxima-6.pdf

18. Fujisawa T. Single-Electron Dynamics. In: *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*. American Scientific Publishers. American Scientific Publishers; 2004. Vol. 9. P. 885–902.

19. Ovchinnikov A. A., Erikhman N. S. Calculation of particle mobility at high temperature. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1978;48(6):1118–1122. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_048_06_1118.pdf

References

1. Zeyde K. M. The application of the discrete element method to study the refractive properties of a liquid flow with powder impurities. *Zhurnal Radioelektroniki = Journal of Radio Electronics*. 2018;(9). (In Russ.) DOI: 10.30898/1684-1719.2018.9.4

2. Baorong C., Zhichao H., Zhaochang Z. Improved discrete element method for linear and nonlinear dynamic analysis of 3-D beam structures. *Tsinghua Science and Technology*. 1997;2(2):529–535. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6078045>

3. Nakashima H. Discrete element method (DEM) and its possible application. In: *SICE Annual Conference, Sapporo, Japan, Aug. 4–6, 2004*, pp. 1104–1107.

4. Thornton A., Weinhart T., Luding S., Bokhove O., Modeling of particle size segregation: calibration using the discrete particle method. *Inter-*

national Journal of Modern Physics C. 2012;23(8):1240014. DOI:10.1142/S0129183112400141.

5. Vintizenko I. I., Mityushkina V. Yu. Limit modes of operation of relativistic magnetron microwave generators. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2005;(10):74–78. (In Russ.)

6. Bityukov V. K., Korolev A. N., Kotov A. F. Features of Radiowaves Passage Through Non-Stationary Cold Plasma. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2007;(9):11–13. (In Russ.)

7. Kolychev S. A., Yarygin A. P. Radiation of Space Basing Plasma Antenna Feed by Magnetic Dipolar. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2008;(6):102–105. (In Russ.)

8. Egorov A. V., Martynenko M. A., Prokofiev B. V. Multipact factor discharge in rectangular waveguides for energy output from high-power microwave high-voltage computers. *Zhurnal Radioelektroniki = Journal of Radio Electronics*. 2015;(6). Available at: <http://jre.cplire.ru/mac/jun15/3/text.html> (In Russ.)

9. Zeyde K. M. MercuryDPM adaptation for electromagnetic microscopic DEM simulation. In: *Proceedings of the 2019 9th IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications, APWC 2019, Granada, Spain, Sept. 9–13, 2019*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2019. DOI: 10.1109/APWC.2019.8870502

10. Munjiza A. *The combined finite-discrete element method*. England: John Wiley & Sons; 2004. DOI: 10.1002/0470020180

11. Zeyde K. M. Optimization of finite element mesh by the a priori parameter of smallness. In: *IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO), Reykjavik, Iceland, Aug. 8–10, 2018*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2018. DOI: 10.1109/NEMO.2018.8503468

12. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. New York, London: John Wiley & Sons, Inc.; 1962.

13. Kobzev A. P. About the radiation mechanism of a uniformly moving charge. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra = Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*. 2014;45(3):1112–1159. Available at: http://www1.jinr.ru/Pepan/2014-v45/v-45-3/06_kobz.pdf (In Russ.)

14. Demir V., Elsherbeni A. Z. Compute unified device architecture (CUDA) based finite-difference time-domain (FDTD) implementation. *ACES Journal*. 2010;25(4):303–314. Available at: https://inside.mines.edu/~aelsherb/pdfs/journal_papers/2010/CUDA_Based_FDTD_Implementation.pdf

15. Lvovich I. Ya., Preobrazhenskiy A. P., Choporov O. N., Kaydakova K. V. The analysis of the scattering electromagnetic waves with use of parallel computing. In: *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Omsk, May 21–23, 2015*. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.; 2015. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147133

16. Zeyde K. M. Estimation of optimal space-time sampling in problems of tracking of rotating targets, using MDR provision. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*. 2016;21(5):46–51. (In Russ.)

17. Woollett E. L. *Maxima by example: Ch. 11 Fast Fourier transform tools*. August 13, 2009. Available at: https://www.moodle2.tfe.umu.se/pluginfile.php/27372/mod_book/chapter/416/maxima/maxima_intro/wollett_maxima-6.pdf

18. Fujisawa T. Single-Electron Dynamics. In: *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*. American Scientific Publishers. American Scientific Publishers; 2004. Vol. 9, pp. 885–902.

19. Ovchinnikov A. A., Erikhman N. S. Calculation of particle mobility at high temperature. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1978;48(6):1118–1122. Available at: http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_048_06_1118.pdf

Информация об авторе

Зейде Кирилл Михайлович, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер, старший преподаватель департамента радиоэлектроники и связи, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.

Information about the author

Kirill M. Zeyde, Candidate of Science in Physics and Mathematics, leading engineer, senior lecturer of the Department of Radioelectronics and Communications of Engineering School of Information Technologies, Telecommunications and Control Systems, Ural Federal University named after First President of Russia B.N. Yeltsin, 32 Mira Str., Ekaterinburg, 620002, Russia.

Поступила / Received: 22.19.2019

Принята в печать / Accepted: 15.01.2020